

# Netze und Gyroide: wenig bekannt und doch in Chemie, Materialwissenschaften und Mathematik allgegenwärtig

Stephen T. Hyde,\* Michael O’Keeffe und Davide M. Proserpio

Flüssigkristalle · Gyroide · Materialwissenschaften ·  
Netze · Polymere

„Die Geometrie ... hat Gott die Urbilder für die Erschaffung der Welt geliefert.“  
Johannes Kepler<sup>[1]</sup>

## 1. Einleitung

Wir berichten hier über eine faszinierende geometrische Figur, die in der Chemie und den Materialwissenschaften allgegenwärtig, aber noch nicht hinreichend bekannt ist. Wir rufen deshalb die Mathematiker auf, der reich strukturierten Natur mehr Aufmerksamkeit zuteil werden zu lassen, und ermutigen die Materialwissenschaftler, ein wenig mehr über Mathematik zu lernen. Unser Ziel ist keine strenge mathematische Abhandlung, um etwas Mathematik kommen wir am Anfang aber nicht umhin.

Regelmäßige Körper wie die fünf Platonischen Polyeder, die seit Jahrtausenden bestaunt werden, sind ein fester Bestandteil der menschlichen Kultur. Wir betrachten die Platonischen Körper hier als die fünf regelmäßigen Parkettierungen auf einer Kugeloberfläche,

d.h. einer zweidimensionalen, positiv gekrümmten (konvexen) Fläche. Die *Fahne* einer Parkettierung auf einer zweidimensionalen Fläche ist eine Kombination aus einer Kachel, einer Kante und einem Scheitel, die zusammenfallen. Eine allgemein akzeptierte Definition für Regelmäßigkeit ist Fahnentransitivität, d.h. alle Fahnen stehen über die Symmetrie der Parkettierung miteinander in Beziehung (es gilt also nur eine Art von Fahne).

Neben den fünf Platonischen Körpern gibt es drei regelmäßige Parkettierungen von Ebenen (also Flächen mit der Krümmung null), bei denen diese in der vertrauten Weise flächendeckend mit gleichartigen Dreiecken, Quadraten oder Sechsecken bedeckt sind. Auch die entsprechenden regelmäßigen Parkettierungen des dreidimensionalen Raums sind bekannt. Fahnen lassen sich damit als Polyeder (Kacheln) mit einer Fläche, einer Kante und einem Scheitel auffassen, die zusammenfallen. Die regelmäßigen Parkettierungen der Dreisphäre sind die sechs nicht sternförmigen regelmäßigen Polytope des vierdimensionalen Raums. Der vierdimensionale Raum ist hier der vielfältigste, in höherdimensionalen Räumen gibt es nur drei regelmäßige Polytope (und im dreidimensionalen natürlich fünf). Im flachen dreidimensionalen (also euklidischen) Raum, dem Raum unserer Alltagserfahrung, gibt es nur eine regelmäßige Parkettierung, die bekannte Ausfüllung des Raums mit gleichartigen Würfeln mit gemeinsamen Kanten (Fläche an Fläche). Das klassische Werk über diese Körper ist *Regular Polytopes* von Coxeter. Der Autor merkt darin zu den Parkettierungen des dreidimensionalen euklidischen Raums an: „Für die Entwicklung einer allgemeinen Theorie

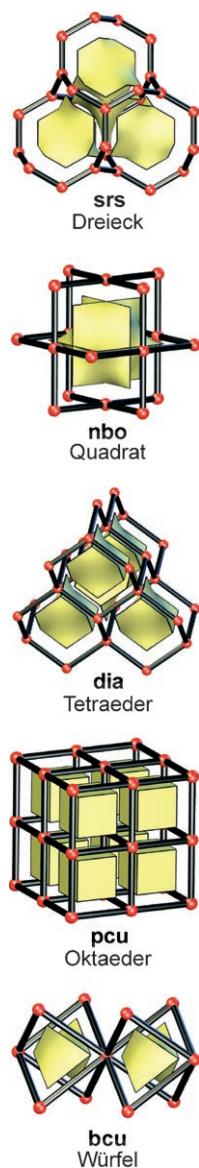
ist es ein unglücklicher Zufall, dass nur ein Wabenmuster [eine Parkettierung] regelmäßig ist ...“<sup>[2]</sup>

Dies ist in der Tat misslich, denn vielleicht als Konsequenz daraus wurde die Vielfalt periodischer Graphen, die die topologische Basis von Kristallstrukturen bilden, von Mathematikern weitgehend vernachlässigt. Der Graph, der mit der regelmäßigen Würfel-Parkettierung verknüpft ist (und darauf zurückgeht), besteht aus Kanten und Scheiteln. In der Natur tritt dieser Graph in einer Modifikation von elementarem Polonium auf, Chemiker sprechen daher häufig vom  $\alpha$ -Po-Netz. Kürzlich wurde ein System zur Beschreibung von Netzen entwickelt, in dem das  $\alpha$ -Po-Netz das Symbol **pcu** erhielt.<sup>[3]</sup> Dieser Essay handelt von einem anderen periodischen Graphen und der damit verbundenen Fläche.

## 2. Netze und Parkettierungen

Als vor einigen Jahren eine Taxonomie dreiperiodischer Netze (einer besonderen Art periodischer Graphen) entwickelt wurde, konzentrierte man sich bewusst auf die Netze und nicht auf die entsprechenden Parkettierungen.<sup>[3,4]</sup> Als regelmäßige Netze wurden solche definiert, bei denen die Scheitelfigur – die Figur, die durch die benachbarten Scheitel festgelegt ist –, aus Symmetriegründen ein regelmäßiges Polyeder oder Polygon ist. Fünf derartige Netze – mit dem gleichseitigen Dreieck, dem Quadrat, dem Tetraeder, dem Oktaeder und dem Würfel als Scheitelfiguren – wurden nachgewiesen (Abbildung 1). Für jedes dieser Netze gibt es genau eine natürliche Parkettierung, deren Kacheln aber nicht notwendigerweise Polyeder

[\*] Prof. S. T. Hyde  
Department of Applied Mathematics  
Research School of Physical Sciences  
Australian National University, ACT 0200  
(Australien)  
Fax: (+61) 2-61254553  
E-Mail: stephen.hyde@anu.edu.au  
Prof. M. O’Keeffe  
Department of Chemistry and Biochemistry  
Arizona State University, Tempe, Arizona  
85287-1604 (USA)  
Prof. D. M. Proserpio  
Dipartimento di Chimica Strutturale  
e Stereochemica Inorganica (DCSSI)  
Università di Milano  
Via G. Venezian 21, 20133 Mailand (Italien)



**Abbildung 1.** Fragmente der regelmäßigen Netze mit ihren Symbolen und Scheitelfiguren. Die natürliche Pflasterung der Netze ist verkleinert wiedergegeben, in Wirklichkeit füllt sie den Raum aus.

im üblichen Sinn sein müssen, da auch Scheitel möglich sind, an denen sich nur zwei Kanten treffen (Abbildung 1). Bei regelmäßigen Netzen ist die natürliche Parkettierung die einzige, die die volle Symmetrie des Netzes aufweist. Interessanterweise scheinen diese fünf Netze die einzigen zu sein, bei deren Parkettierungen jeweils genau eine Art von Scheitel, Kante, Fläche und Kachel auftritt (Transitivität 1111).<sup>[3]</sup> Diese fünf Netze sind für die Geometrie von Kristallen, und periodisch aufgebauten Stoffen allgemein, höchst bedeutsam.

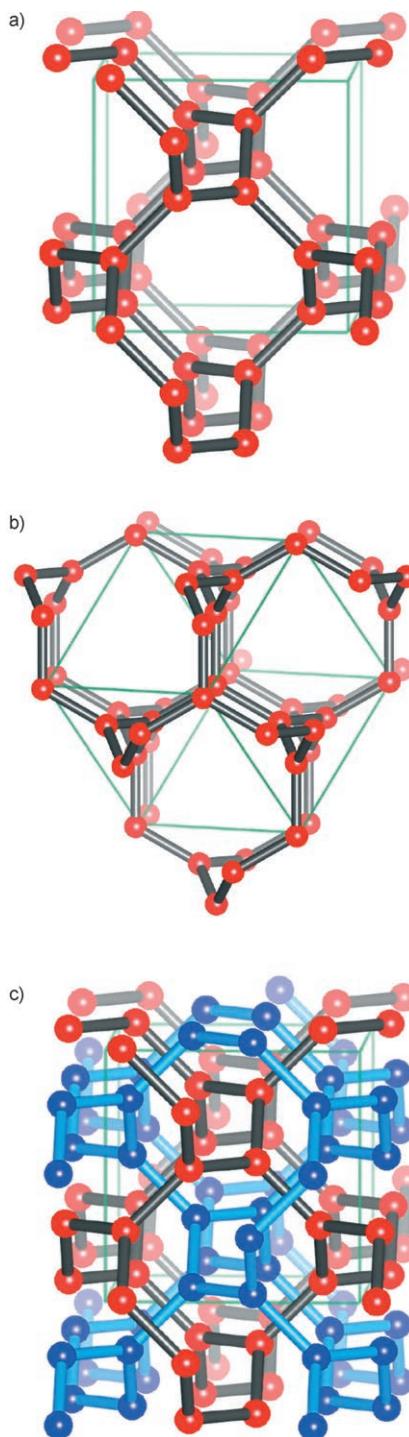
### 3. Das srs-Netz und $K_4$

Unabhängig von der Erforschung regelmäßiger Netze warf Toshikazu Sunada kürzlich die Frage auf, welche dreiperiodischen Netze stark isotrop sind, also welche Permutation der zu einem Scheitel benachbarten Scheitel durch eine Symmetrieroberung des Musters erhalten werden kann (all diese Permutationen erstrecken sich auf Isometrien des Netzes).<sup>[5]</sup> Da die Zahl der Permutationen für einen  $n$ -fach koordinierten Scheitel  $n!$  ist, begrenzt die Einschränkung einer kristallographischen Symmetrie in einer dreiperiodischen Struktur (wegen der es insbesondere keine Symmetrieelemente der Ordnung 5 gibt) die möglichen Koordinationszahlen in einem stark isotropen Netz auf drei oder vier, und nur zwei der oben erwähnten regelmäßigen Netze sind stark isotrop. Die beiden Netze (Abbildung 1) werden mit **srs** (dreifach koordiniert) und **dia** symbolisiert (vierfach koordiniert).<sup>[3]</sup> Letzteres ist das Netz der Diamantstruktur, ersteres das Hauptthema unseres Essays. Wie Sunada anmerkte, ist der Quotientengraph der Diamantstruktur (der Graph, bei dem Translationen ausgeklammert sind) der vollständige Graph mit vier Scheiteln ( $K_4$ ), daher benannte er sie  $K_4$ -Kristall.

Die Publikation von Sunada erregte einiges Aufsehen: Eine Pressemitteilung der American Mathematical Society rühmte unter der Überschrift „Ein Kristall, den die Natur übersehen haben mag“ seine „atemberaubende Schönheit“ und fragte, ob dieser Kristall in der Natur vorkommen oder synthetisiert werden könnte.<sup>[6]</sup> Der Kristall wurde ferner in *Science*, *Nature Materials* und zahlreichen anderen Zeitschriften mit ähnlichem Tenor besprochen. Die Tatsache, dass eine Struktur, die Kristallographen und Kristallchemikern seit fast einhundert Jahren und Materialwissenschaftlern und Festkörperphysikern seit mehr als fünfzig Jahren bekannt ist, plötzlich in den Mittelpunkt des Interesses rücken konnte, verdeutlicht die Kluft zwischen der Mathematik und einigen der übrigen Naturwissenschaften.

In seiner am stärksten symmetrischen Einbettung ist das **srs**-Netz kubisch, und die Scheitel befinden sich an den Fixpunkten der Punktgruppe 32

( $D_3$ ), an denen sich dreizählige und zweizählige Achsen schneiden. Die Koordinaten sind dadurch festgelegt; diese Struktur bezeichnen Kristallographen als invarianten Gitterkomplex. Diese Strukturen sind alle in den International Tables for Crystallography dokumentiert (eigentlich eine Pflichtlektüre für Mathematiker, die an periodischen Strukturen interessiert sind); dort ist  $Y^*$  das Symbol für das **srs**-Netz.<sup>[7]</sup> Dieses Symbol erschien erstmals 1933 in einer Veröffentlichung von Heesch und Laves, die sich mit seltenen Kugelpackungen befasst.<sup>[8]</sup> Daher wird das **srs**-Netz auch Laves-Netz genannt, ferner wurde es in einer wegweisenden Publikation von Wells als „Netz 1“ [und später als (10,3)-a] bezeichnet. Wells führte auch einige Beispiele aus der Kristallchemie an.<sup>[9]</sup> Am deutlichsten wird dies bei einer Verbindungsklasse, deren Strukturen mit derjenigen von  $\text{SrSi}_2$  verwandt sind (daher das Symbol **srs**), wobei das Netz die Topologie der Si-Teilstruktur angibt. Eine spektakuläre Entdeckung war kürzlich eine dreifach koordinierte Hochdruckmodifikation von elementarem Stickstoff.<sup>[10]</sup> Nachdem das Interesse an Koordinationspolymeren und metall-organischen Gerüsten in den 1990er Jahren wieder zunahm, wurden bald solche Verbindungen mit **srs**-Topologie entdeckt,<sup>[11,12]</sup> sodass diese heute nichts Ungewöhnliches mehr ist. Auch eine allotrope, metallische Kohlenstoffmodifikation mit dieser Topologie wurde vorgeschlagen.<sup>[13]</sup> Die Eigenschaften des Netzes, das in Abbildung 2 wiedergegeben ist, werden bei einer Symmetriebetrachtung noch deutlicher. In seiner am stärksten symmetrischen Einbettung ist die Symmetrie des Netzes  $I\bar{4},32$  isomorph mit der kombinatorischen Symmetrie (der Automorphismen-Gruppe) des Graphen. Diese Symmetrie ist die komplexeste für Raumgruppen, bei denen nur eigentliche Symmetrieroberungen auftreten (Rotationen und Translationen). Wichtig sind die sich nicht schneidenden vierzähligen Achsen, bei denen es sich entweder um  $4_1$ - oder  $4_3$ -Schrauben handelt. Ferner gibt es sich nicht schneidende dreizählige Achsen, die entweder dreizählige Achsen oder  $3_1$ - oder  $3_2$ -Schrauben sind. Da alle Symmetrieroberungen eigentlich sind, ist die Struktur chiral, und es gibt eine links- und eine rechtshändige Form.



Das srs-Netz ist also das einzige dreifach koordinierte, dreiperiodische Netz mit einer dreizähligen Symmetrie am Scheitel und daher das einzige Netz mit

äquivalenten Kanten (Kantentransitivität).

Der Weg, auf dem das srs-Netz 50 Jahre zuvor Eingang in die Mathematik gefunden hatte, ist interessant. Bei regelmäßigen Polyedern  $\{n,3\}$  mit  $n=3, 4$  oder  $5$  treffen sich an jedem Scheitel  $3 n$ -Ecke (Tetraeder, Würfel oder Dodekaeder). Bei einer  $\{6,3\}$ -Parkettierung ist die Ebene mit regelmäßigen Sechsecken bedeckt, und bei  $\{n,3\}$  mit  $n > 6$  handelt es sich um Parkettierungen der hyperbolischen Ebene. Wir können aber (wie von Coxeter vorgeschlagen<sup>[14]</sup> und später von Grünbaum aufgegriffen<sup>[15]</sup>) Flächen zulassen, die eine unbegrenzte Kantenzahl aufweisen und schiefe Vielecke sein dürfen.  $\{\infty,3\}$  entspricht dann einem verallgemeinerten Polyeder, das jetzt als Familie von Vielecken derart definiert ist, dass zwei beliebige Vielecke entweder einen Scheitel oder eine Kante (zwei benachbarte Scheitel) gemeinsam haben oder, wenn dies nicht der Fall ist, jede Kante zu genau zwei Vielecken gehört.

In der Tat gibt es zwei derartige Polyeder, deren Flächen Helices sind, die dreiwertige Scheitel aufweisen:  $\{\infty,3\}a$  und  $\{\infty,3\}b$ . Die Flächen dieser Polyeder sind dreizählige oder vierzählige Helices (Abbildung 3) und ihre Netze (ihre Sätze von Kanten und Scheiteln) sind vom srs-Typ. Dieses Merkmal wurde von Grünbaum,<sup>[15]</sup> der auch Wells<sup>[9]</sup> zitiert, erkannt und beschrieben. In seinen frühen Arbeiten nannte Coxeter dieses Netz „Laves-Graph“.<sup>[14]</sup>

In der natürlichen Parkettierung dieses Netzes gibt es nur eine Art von Kachel mit drei Zehncken (Abbildung 1).<sup>[3]</sup> Diese Zehnringe sind die einzigen Ringe in der Struktur (Ring meint hier eine geschlossene Kurve, die nicht die Summe kleinerer Ringe ist), und in jedem Scheitel treffen sich 15 dieser Zehncke.

#### 4. Einander durchdringende srs-Netze

Zu jeder Parkettierung lässt sich eine duale Parkettierung definieren, bei der durch Verbinden der Mittelpunkte von benachbarten Kacheln der Ausgangsparkettierung neue Kanten eingeführt werden. Das erhaltene duale Netz hat dann eine Koordinationszahl, die

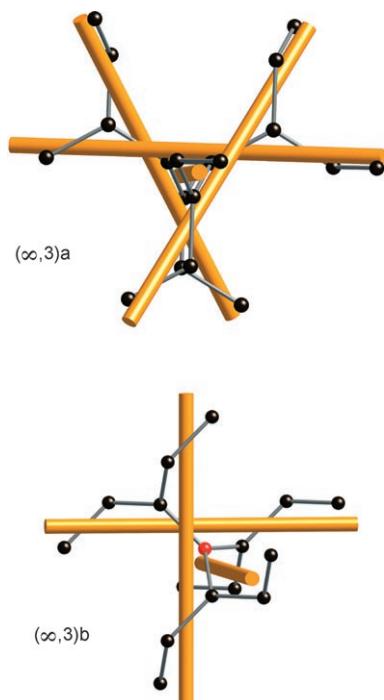


Abbildung 3. Fragmente des  $\{\infty,3\}$ -Polyeders. Die Kanten sind  $3_2$ - und  $4_1$ -Helices, die Achsen sind als Zylinder dargestellt. Das Netz ist in beiden Fällen vom srs-Typ.

der Zahl der Flächen der ursprünglichen Parkettierung entspricht. Bei srs-Netzen ist auch das zugehörige duale Netz wieder vom Typ srs, weist aber nun die entgegengesetzte Händigkeit auf. Wie schon Wells wusste, können die beiden enantiomeren Formen ineinander greifen (Abbildung 2);<sup>[16]</sup> dies wurde später für Koordinationspolymere nachgewiesen.<sup>[17]</sup> Dieses Durchdringen und die periodische Fläche dazwischen führen uns zum interessantesten Teil unseres Essays.

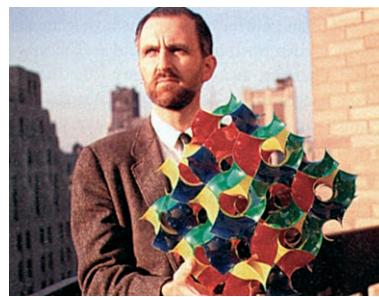
Die geometrischen Muster (Netze) von Wells, die zur Beschreibung der Anordnung in Kristallen genutzt wurden, wurden bald in einem ganz anderen Zusammenhang entdeckt: bei weichen, fehlgeordneten Flüssigkristallen. Die Kluft zwischen der Untersuchung atomar geordneter und molekularer Kristalle (von Flüssigkristallen) und der reinen Geometrie verringerte sich durch die Arbeiten von Vittorio Luzzati und seinen Kollegen, die in den 1960er Jahren die Selbstorganisation von organischen Amphiphilen (einschließlich metallischer Seifen und Lipiden) erforschten. Diese Stoffe bilden geordnete supramolekulare Strukturen, deren ato-

mare Ordnung sich häufig nicht von der einer ungeordneten Schmelze unterscheidet, die kollektiv aber Beugungsmuster wie Kristalle mit atomarer Ordnung hervorrufen. Die Arbeitsgruppe von Luzzati entdeckte, dass sich bei geeigneten Temperaturen und Wassergehalten zahlreiche neuartige Phasen bilden. Diese neue Klasse kondensierter Materie wird heute weiche Materie genannt.

Eine dieser Strukturen, die Spegt und Skoulios 1964 erstmals bei trockenen Seifen entdeckten, wurde später von Luzzati und Spegt als Paar einander durchdringender Netze beschrieben, dessen Kanten aus linearen Anordnungen von Sr-Atomen bestehen, die in ein unpolares (Kohlenwasserstoff-)Kontinuum eingebettet sind.<sup>[18]</sup> Dieses Muster entspricht dem Paar aus links- und rechtshändigen **srs**-Netzen in Abbildung 2. Bis 1968 hatten Luzzati et al. diese Struktur in zahlreichen Seifen und Lipid-Wasser-Systemen nachgewiesen.<sup>[19]</sup> Die Wissenschaftler leiteten die Struktur dabei alleine aus Pulverbeugungsmustern ab (dazu zerstörten sie absichtlich große Flüssigkristalle), ohne etwas über die früheren Arbeiten über diese Netze zu wissen.

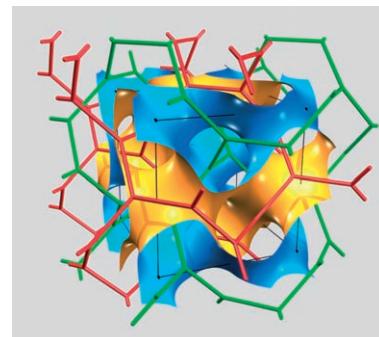
## 5. Das Gyroid

Zur gleichen Zeit wurden Flüssigkristalle auch von schwedischen und finnischen Physikochemikern untersucht, zunächst von Per Ekwall, dann von Krister Fontell, Kåre Larsson und Kollegen. Ihre Befunde deuteten auf eine Zusammenlagerung der Mesogenmoleküle zu Schichtstrukturen hin, die den Doppelschichten in Zellmembranen ähneln.<sup>[20]</sup> Wie aggregieren diese Moleküle dann zu dem Paar chiraler **srs**-Netze aus miteinander verknüpften Kanten, das von Luzzati (wieder)entdeckt wurde? Dieser Zusammenhang war nicht geklärt, bis Larsson et al. 1984 die Beziehung zwischen dem Paar von **srs**-Netzen und einer schwammartigen Fläche erkannten, die Gyroid (oder *G*-Fläche) genannt wird.<sup>[21]</sup> Diese in den 1960er Jahren vom NASA-Wissenschaftler Alan Schoen entdeckte Fläche<sup>[22,23]</sup> (Abbildung 4) teilt den Raum in ein Paar miteinander verschlungener Kanäle, deren Achsen genau mit den



**Abbildung 4.** Alan Schoen auf dem Dach des Courant Institute in Manhattan mit seinem Modell des Gyroids (Foto: Stefan Hildebrandt, Nachdruck mit Genehmigung des Springer-Verlags).

Kanten der **srs**-Netze zusammenfallen (Abbildung 5). Damit war die Verknüpfung zwischen der Beschreibung von Luzzati und dem Membranmodell hergestellt: das Netz beschreibt die schwammartigen Kanäle der kompliziert gefalteten Membran.



**Abbildung 5.** Das Gyroid, eine von Alan Schoen entdeckte dreiperiodische Minimalfläche. Die Fläche ist zusammen mit den Labyrinth-Graphen abgebildet (rot und grün), die die Kanalstruktur beschreiben. Beide Graphen weisen eine **srs**-Struktur auf (siehe Abbildung 2c, Bild: Gerd Schröder-Turk).

1992 berichtete eine Gruppe der Mobil Research and Development Corporation in zwei Publikationen über geordnete Flüssigkristallstrukturen, die als Templat für mesoporöse Kieselsäurestrukturen dienen können, bei denen sich der glasartige Stoff an der Grenzfläche ablagert, sodass nach der Calcination eine regelmäßige Anordnung leerer Kanäle zurückbleibt.<sup>[24,25]</sup> In dieser kubischen Verbindung, die später MCM-48 genannt wurde, ist die Grenzfläche die Oberfläche des Gyroids, und die Kanäle durchziehen ein Paar sich durchdringender Netze.<sup>[26]</sup>

Der Einfluss dieser beiden Veröffentlichungen lässt sich daran ablesen, dass sie in den vergangenen 15 Jahren mehr als 10000 Mal zitiert wurden. In dieser Zeit ist über sehr viele anorganische Stoffe mit der Struktur von MCM-48 berichtet worden, und vor kurzem auch über ein hierarchisches mesoporöses Material mit kristalliner Ordnung. Die Ordnung herrscht auf atomarer Ebene und im Mesomaßstab, und die Lücke zwischen und Flüssigkristallen und Kristallen mit atomarer Ordnung ist damit geschlossen.<sup>[27]</sup>

Das Gyroid ist eng mit anderen wichtigen dreiperiodischen Minimalflächen, die überall die mittlere Krümmung null haben, verwandt. Die natürlichen Parkettierungen der regelmäßigen Netze **dia** und **pcu** sind auch selbstdual (das verbleibende Paar **nbo** und **bcu** hat wechselseitig duale Parkettierungen), und Paare von Netzen können sich durchdringen. Die periodischen Minimalflächen zwischen den Paaren werden die *D*- und *P*-Fläche genannt. Die *D*-Fläche wurde um 1860 von Bernhard Riemann parametriert;<sup>[28]</sup> sie wurde später von Schwarz wiederentdeckt, der auch die *P*-Fläche entdeckte.<sup>[29]</sup> Beide Flächen haben eine identische zweidimensionale Geometrie, sie unterscheiden sich aber in ihrer dreidimensionalen Einbettung in den Raum. Wie ein Blatt Papier einfach zu einem Zylinder verbogen werden kann, so sind auch Stücke der *D*- und *P*-Fläche durch eine Bonnet-Transformation ineinander überführbar.<sup>[30]</sup> Schoen baute Plastikmodelle der *P*- und *D*-Fläche, die sich à la Bonnet biegen ließen.<sup>[31]</sup> Bei seinen mathematischen und physikalischen Untersuchungen entdeckte er eine dritte dreiperiodische Minimalfläche zwischen den aperiodischen Intermediaten der *D*- und *P*-Fläche: das Gyroid. Dennoch blieb das Gyroid in der Mathematik bis zu der Entdeckung durch Schoen unbekannt, der auch nur in einem NASA-Patent und dem Begleittext dazu darüber berichtete.<sup>[22,23]</sup> Diese Struktur war von Mathematikern mehr als 100 Jahre lang übersehen worden! Jedes Labyrinth des Gyroids wird zentriert durch das Netz, für das Sunada sich interessierte.

Wäre diese Entdeckung früher gemacht worden, wenn regelmäßige Netze und ihre Parkettierungen bekannt ge-

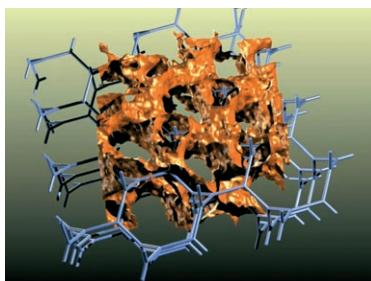
wesen wären (obwohl nicht alle Paare von Netzen dualityer Parkettierungen entsprechende Minimalflächen haben müssen)? Vielleicht sollten wir die Aussage von Sunada, das **srs**-Netz ( $K_4$ ) sei die Struktur, die „die Natur zu erschaffen vergessen haben könnte“ umformulieren zu „die Struktur, die die Mathematiker, angefangen bei Riemann, übersahen“?

Die Entdeckung der Beziehung zwischen dem **srs**-Netz und dem Gyroid, eine der gleichförmigsten Faltungen einer sattelförmigen Schicht in den dreidimensionalen euklidischen Raum, offenbarte weitere Verbindungen zwischen diesem Netz und Stoffen. Inzwischen ist bekannt, dass die Gyroidstruktur auch bei zahlreichen anderen „weichen“ supramolekularen Verbindungen, von Lipiden in Zellen bis zu synthetischen Polymerschmelzen, auftritt.<sup>[32]</sup> Mit dem Gyroid lässt sich zudem das Direktorfeld von Molekülen elegant beschreiben, die in der „blauen“ Tief temperaturphase einer Klasse durchstimmbarer elektrooptischer Stoffe vorliegen.<sup>[33,34]</sup>

Durch Gyroide wird der Raum sehr regelmäßig unterteilt. Diese Regelmäßigkeit erklärt, warum Gyroide in so vielen unterschiedlichen Stoffen auftreten.<sup>[35]</sup> Als Maß für die Universalität von Gyroiden kann die Größe von Kristallen mit Gyroidstrukturen dienen. Bicontinuierliche Phasen in Amphiphilen haben Wiederholungsabstände in der Größenordnung von 100 Å. Bei höhermolekularen Polymeren kann dieser Wert 10-mal größer sein, damit ist der Wiederholungsabstand von (Flüssig)Kristallen etwa 100-mal größer als bei starren Kristallen mit atomarer Ordnung. Selbst in weichen, im Grunde geschmolzenen, molekular aufgebauten Stoffen wie Polymerschmelzen kann also eine Fernordnung auftreten; dabei befinden sich  $10^3$ – $10^4$  Moleküle in einer Elementarzelle.

Ein spektakuläres Beispiel für das Auftreten des **srs**-Netzes in der Natur ist im Sommer über den Feldern Europas zu beobachten: Der Grüne Zipfelfalter (*Callophrys rubi*) ist ein prächtiger Schmetterling, der an seinen metallisch grün schimmernden Flügeln leicht zu erkennen ist. Mit einem optischen Mikroskop sieht man in den Flügeln eine sehr große Zahl sich überlappender

Schuppen. Elektronenmikroskopisch wird innerhalb vieler Schuppen eine außergewöhnliche dreidimensionale Matrix aus hartem Gerüstmaterial erkennbar<sup>[36]</sup>, die morphologisch mit dem Gyroid verwandt sind.<sup>[37]</sup> Kürzlich wurde nachgewiesen, dass die Struktur der Matrix exakt durch ein **srs**-Netz mit verdickten Kanten wiedergegeben wird. Das Material ähnelt damit einem weichen Schwamm, der durch Ausfüllen eines der Kanalsystems des Gyroids entsteht (Abbildung 6).<sup>[38,39]</sup>



**Abbildung 6.** Chitin-Netzwerk in den Schuppen der Flügel des grünen Zipfelfalters (*Callophrys rubi*). Die braune Fläche legt die äußere Form der Chitinmatrix fest, deren Struktur elektronenmikroskopisch ermittelt wurde. Die Kanäle mit blauen Kanten sind ausgefüllt. Das blaue **srs**-Netz beschreibt dieses Chitin-Netzwerk erstaunlich genau (Bild: Stuart Ramsden und Gerd Schröder-Turk).

Die Kantenlänge dieser **srs**-Matrix beträgt ungefähr 3000 Å und liegt damit in der Größenordnung der Wellenlänge sichtbaren Lichts. Die schöne Färbung des sich bewegenden Flügels wird wahrscheinlich durch die Streuung des Sonnenlichts in der **srs**-Matrix hervorgerufen. Optophysiker sind an dem Matrixmaterial interessiert, denn es könnte sich um natürliche dreidimensionale photonische Kristalle handeln, nach denen lange gesucht wurde, weil damit Fortschritte bei optischen Computern möglich sind. Das Matrixmaterial entsteht in der Schmetterlingspuppe und ist ein Beispiel für die Selbstorganisation weicher Materie in der Natur. Diese weiche Materie setzt sich aus Membranbestandteilen und Proteinen zusammen, die als Templat für die spätere Bildung des harten Gerüsts im schlüpfenden Schmetterling dienen. Die Matrix bildet sich durch die Kondensation von Lipiddoppelschichten im glatten endoplasmatischen Reticulum, die

durch Proteine ausgelöst wird und einen viellagigen laminierten Schwamm liefert. Die Homogenität des Gyroids ermöglicht eine einheitliche Krümmung und Packung der Lipidmembranen und der beteiligten Proteine. Auch in diesem komplexen chemischen System folgt die Entstehung der **srs**/Gyroid-Strukturen aus ihrer großen Regelmäßigkeit.

Schließlich möchten wir dazu ermuntern, den Arbeiten von Mathematikern mehr Aufmerksamkeit zu schenken. Die wunderschönen und komplexen periodischen Strukturen der Natur sind ein aussichtsreiches Feld für tiefgreifendere mathematische Untersuchungen. Gleichzeitig fordern wir die Mathematiker auf, ihre Arbeiten anderen Naturwissenschaftlern besser verständlich zu machen, etwa durch die Aufnahme von Bildern wie in Lit. [5] durch Sunada.

Eingegangen am 1. April 2008  
Online veröffentlicht am 2. September 2008

Übersetzt von Dr. Jürgen Eckwert, Seeheim-Jugenheim

- [1] Frei nach: J. Kepler, *Harmonices Mundi*, Linz, **1619**. Eine deutsche Übersetzung ist verfügbar: „Weltharmonik“ Unveränderter Nachdruck der Ausgabe von 1939, übersetzt und eingeleitet von Max Caspar, 7. Aufl., **2006**, Oldenbourg Verlag.
- [2] H. S. M. Coxeter, *Regular Polytopes*, 3. Aufl., Dover, New York, **1973**.
- [3] O. Delgado-Friedrichs, M. O’Keeffe, O. M. Yaghi, *Acta Crystallogr. Sect. A* **2002**, 59, 22–27. Siehe auch *Reticular Chemistry Structural Resource*, <http://rcsr.anu.edu.au>.
- [4] O. Delgado-Friedrichs, M. O’Keeffe, O. M. Yaghi, *Phys. Chem. Chem. Phys.* **2007**, 9, 1035–1043.
- [5] T. Sunada, *Not. Am. Math. Soc.* **2008**, 55, 208–215.
- [6] American Mathematical Society, *A Crystal that Nature May Have Missed*, **2008**, zu finden unter [www.ams.org/ams/press/sunadanots-feb08.html](http://www.ams.org/ams/press/sunadanots-feb08.html).
- [7] „Lattice complexes“: W. Fischer, E. Koch in *International Tables for Crystallography A* (Hrsg.: T. Hahn), Kluwer, Dordrecht, **2005**, Kap. 14.
- [8] H. Heesch, F. Laves, *Z. Kristallogr.* **1933**, 85, 443–453.
- [9] A. F. Wells, *Acta Crystallogr.* **1954**, 7, 535–544.
- [10] M. I. Eremets, A. G. Gavriluk, I. A. Trojan, D. A. Dzivenko, R. Boehler, *Nat. Mater.* **2004**, 3, 558–563.

[11] L. Carlucci, G. Ciani, D. M. Proserpio, A. Sironi, *J. Am. Chem. Soc.* **1995**, *117*, 12861–12862.

[12] O. M. Yaghi, C. E. Davis, G. Li, H. Li, *J. Am. Chem. Soc.* **1997**, *119*, 2861–2868.

[13] M. O'Keeffe, G. B. Adams, O. F. Sankey, *Phys. Rev. Lett.* **1992**, *68*, 2325–2328.

[14] H. S. M. Coxeter, *Can. J. Math.* **1955**, *7*, 18–23.

[15] B. Grünbaum, *Aequationes Math.* **1977**, *16*, 1–20.

[16] A. F. Wells, *Acta Crystallogr.* **1954**, *7*, 849–853.

[17] a) L. Carlucci, G. Ciani, D. M. Proserpio, A. Sironi, *Chem. Commun.* **1996**, 1393–1394; b) S. R. Batten, R. Robson, *Angew. Chem.* **1998**, *110*, 1558–1595; *Angew. Chem. Int. Ed.* **1998**, *37*, 1460–1494.

[18] V. Luzzati, P. A. Spegt, *Nature* **1967**, *215*, 701–702.

[19] V. Luzzati, A. Tardieu, T. Gulik-Krzywicki, E. Rivas, F. Reiss-Huson, *Nature* **1968**, *220*, 485–486.

[20] G. Lindblom, K. Larsson, L. Johansson, S. Forsén, K. Fontell, *J. Am. Chem. Soc.* **1979**, *101*, 5465–5470.

[21] S. T. Hyde, S. Andersson, B. Ericsson, K. Larsson, *Z. Kristallogr.* **1984**, *168*, 213–219.

[22] A. H. Schoen, NASA Technical Note, TN D-5541, **1970**.

[23] A. H. Schoen, US-Patent 3663347, angemeldet: 16. Juli **1970**; erteilt: 16. Mai **1972**.

[24] C. T. Kresge, M. E. Leonowicz, W. J. Roth, J. C. Vartuli, J. S. Beck, *Nature* **1992**, *359*, 710–712.

[25] J. S. Beck et al., *J. Am. Chem. Soc.* **1992**, *114*, 10834–10843.

[26] V. Alfredsson, M. Anderson, *Chem. Mater.* **1996**, *8*, 1141–1146.

[27] X. Zou, T. Conradsson, M. Klingstedt, M. S. Dadachov, M. O'Keeffe, *Nature* **2005**, *437*, 716–719.

[28] Posthume Veröffentlichung: B. Riemann, K. Hattendorf, *Abh. Ges. Wiss. Goettingen Math.-Phys. Kl.* **1868**, *33*, 3. Nachdruck in B. Riemann, K. Hattendorf, *Gesammelte Mathematische Werke, Wissenschaftlicher Nachlass und Nachträge* (Hrsg.: H. Weber, R. Dedekind, R. Narasimhan), Springer, Berlin, **1996**.

[29] H. A. Schwarz, Bestimmung einer speziellen Minimalfläche (inkl. Nachtrag u. Anhang) in *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, Bd. 1, Verlag von Julius Springer, Berlin, **1865**, S. 6–125. Die Veröffentlichungen von Schwarz enthalten gelungene Darstellungen der Flächen.

[30] O. Bonnet, *C. R. Hebd. Seances Acad. Sci.* **1853**, *37*, 529–532.

[31] A. H. Schoen, *Geometric Analysis and Computer Graphics*, Mathematical Science Research Institute Publication #17, Springer, New York, **1991**.

[32] S. T. Hyde et al., *The Language of Shape*, Elsevier, Amsterdam, **1997**.

[33] B. Pansu, E. Dubois-Violette, *Europhys. Lett.* **1989**, *10*, 43–48.

[34] H. J. Coles, M. N. Pivnenko, *Nature* **2005**, *436*, 997–1000.

[35] G. E. Schröder, S. J. Ramsden, A. G. Christy, S. T. Hyde, *Eur. Phys. J. B* **2003**, *35*, 551–564.

[36] H. Ghiradella, *J. Morphol.* **1989**, *202*, 69–88.

[37] K. Michielsen, D. G. Stavenga, *J. R. Soc. Interface* **2008**, *5*, 85–94.

[38] S. Wickham, M.Sc.-Arbeit, Sydney University, Australien, **2006**.

[39] S. Wickham, H. Averdunk, S. T. Hyde, M. Large, L. Poladian, G. E. Schröder-Turk, unveröffentlichte Ergebnisse.